COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 24 MARS 1856.

PRÉSIDENCE DE M. BINET.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

CALCUL INTÉGRAL. — *Mémoire sur la réduction de classes très-étendues d'intégrales multiples ; par* **M. J. Liouville**. (Extrait par l'auteur.)

« **1**. J'ai obtenu à diverses époques et par différentes méthodes des formules pour la réduction de plusieurs classes très-étendues et assez remarquables d'intégrales multiples. Dans des cas particuliers, ces formules fournissent les valeurs finies de quelques intégrales qui paraissent mériter qu'on les signale. Elles conduisent d'ailleurs à la solution de certains problèmes, au premier abord très-difficiles. On les trouvera réunies et discutées dans mon Mémoire. Je ne pourrai, dans cet Extrait, qu'effleurer le sujet, et je m'attacherai de préférence aux formules qui sont liées à l'intégrale

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \alpha_2^{\frac{2}{n}-1} \ldots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_{n-1},$$

dont je me suis servi dans un article inséré au *Compte rendu* de la dernière

séance (*) pour démontrer la belle formule de Gauss concernant les fonctions Γ. En désignant par R cette intégrale, j'ai prouvé que l'on a

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk}.$$

» 2. Cela posé, considérons l'intégrale à n variables

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-(\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})} \varphi(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1})\, \alpha_1^{\frac{1}{n}} \alpha_2^{\frac{2}{n}} \ldots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}\, d\alpha\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1},$$

où φ désigne une fonction quelconque, telle pourtant, bien entendu, que l'intégrale garde un sens précis et une valeur déterminée. Désignons cette intégrale par L. En substituant à la variable α une variable nouvelle k, liée à α par la relation

$$\alpha = \frac{k^n}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}},$$

nous aurons de suite

$$L = n \int_0^\infty R\, \varphi(k^n)\, k^{n-1}\, dk;$$

et en mettant pour R sa valeur,

$$L = n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty e^{-nk} \varphi(k^n)\, k^{n-1}\, dk.$$

L'intégrale donnée à n variables est donc réduite à une intégrale simple. En prenant pour la fonction φ une puissance de la variable, on retrouverait naturellement la formule de Gauss :

$$\text{(A)} \qquad \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-\mu} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\mu).$$

(*) Je note en passant trois fautes d'impression : page 502, ligne 12, au lieu de $e^{-\alpha} d\alpha$, il faut $e^{-\alpha} \alpha^{\frac{1}{2}-1} d\alpha$; page 503, ligne 6, au lieu de $3^{\frac{1}{2}-1}$, il faut $3^{\frac{1}{2}-\mu}$; page 506, ligne 19, au lieu de $\beta\alpha$, il faut $\beta\gamma$.

» 3. On obtient une formule particulière, digne de remarque, en posant

$$\varphi(k^n) = e^{-ak},$$

où a désigne une constante, telle que la somme $n+a$ soit positive. On a alors

$$\varphi(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}) = e^{-a\sqrt[n]{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}},$$

et il vient

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}+a\sqrt[n]{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\right)}\,\alpha_1^{\frac{1}{n}}\,\alpha_2^{\frac{2}{n}}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}\,d\alpha\,d\alpha_1\ldots d\alpha_{n-1}$$

$$= n^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(n+a)^n}.$$

» Cette formule peut être démontrée autrement; par exemple, au moyen de développements en séries. D'abord en développant l'exponentielle

$$e^{-a\sqrt[n]{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}}$$

en série suivant les puissances de a, on prouvera que la formule est exacte tant que la valeur absolue de a ne surpasse pas n. Remplaçant ensuite a par $a+h$, et développant suivant les puissances de h, on étendra de proche en proche la limite supérieure de a jusqu'à ∞. La formule dont nous parlons une fois établie, on en déduira, si l'on veut, une démonstration nouvelle de l'équation (A) de Gauss : il suffira de prendre la différentielle à indice quelconque des deux membres et de faire ensuite $a = 0$.

» La constante a de notre formule peut être supposée imaginaire, pourvu que la partie réelle de $n+a$ soit positive. Je profiterai de l'occasion pour faire observer que la constante k de la formule

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk}$$

admet de même des valeurs imaginaires. Dans le premier membre, où k entre à la puissance $n^{ième}$, on peut prendre

$$k^n = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

pourvu que l'angle θ soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et alors on doit poser, dans le second membre,

$$k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\theta}{n}\right).$$

Les valeurs extrêmes

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$$

peuvent être admises; pour elles on a

$$k^n = \pm\rho\sqrt{-1}.$$

» 4. Enfin, dans l'intégrale L, on peut supposer la fonction φ nulle dès que la variable atteint une certaine valeur positive b, cette fonction restant d'ailleurs quelconque pour des valeurs moindres. On reconnaît alors que l'intégrale multiple

$$\int\ldots\int e^{-(\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1})}\,\varphi(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1})\,\alpha_1^{\frac{1}{n}}\alpha_2^{\frac{2}{n}}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}\,d\alpha\,d\alpha_1\ldots d\alpha_{n-1},$$

prise pour toutes les valeurs positives de α, α_1, ..., α_{n-1}, qui vérifient l'inégalité

$$\alpha\alpha_1\ldots\alpha_{n-1} < b$$

est égale à l'intégrale simple

$$n^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^c e^{-nk}\,\varphi(k^n)\,k^{n-1}\,dk,$$

où $c = \sqrt[n]{b}$.

» 5. Tout en abrégeant beaucoup, en omettant même de mentionner certaines questions accessoires qui ont de l'intérêt, j'ai pourtant donné quelques développements sur l'intégrale L. Je serai très-bref dans ce qui va suivre.

» L'intégrale à $(n-1)$ variables

$$\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty f\left(x+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\frac{k^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right)\alpha_1^{\frac{1}{n}-1}\alpha_2^{\frac{2}{n}-1}\ldots\alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1}\,d\alpha_1 d\alpha_2\ldots d\alpha_{n-1},$$

que je désignerai par V, et où k est un paramètre positif, x une variable indépendante, peut être traitée par une méthode semblable à celle que j'ai employée pour l'intégrale R. En différentiant par rapport à k, puis substituant à la variable α_1 une autre variable α_n liée à α_1 par la relation

$$\alpha_1 = \frac{k^n}{\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1} \alpha_n},$$

on trouve sans peine que

$$\frac{dV}{dk} = n \frac{dV}{dx}.$$

Donc

$$V = \psi(x + nk).$$

On déterminera la fonction $\psi(x)$ en posant $k = 0$. La valeur de $\psi(x)$ est donc exprimée par l'intégrale

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty f(x + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}) \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \alpha_2^{\frac{2}{n}-1} \ldots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_{n-1},$$

que l'on sait réduire à une intégrale simple (*). On exprimera donc aussi V par une intégrale simple.

» On réduira aisément ensuite à une intégrale double l'intégrale à n variables

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty PQ \alpha_1^{\frac{1}{n}} \alpha_2^{\frac{2}{n}} \ldots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} d\alpha \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1},$$

où j'ai fait, pour abréger,

$$P = f(\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}),$$

et

$$Q = \varphi(\alpha \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}).$$

» En remplaçant α par $a\alpha$, α_1 par $a_1 \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ par $a_{n-1} \alpha_{n-1}$, on remplacera la somme des variables, dont P dépend, par une fonction linéaire de ces variables.

(*) Voir *Journal de Mathématiques*, tome IV, page 229.

» On obtiendra des résultats curieux en supposant que l'une des fonctions P, Q devient nulle, ou même que toutes deux deviennent nulles, lorsque les variables dont elles dépendent surpassent une limite donnée, ou cessent d'être comprises entre des limites données.

» Enfin, parmi les intégrales dont je me suis occupé, je citerai encore la formule

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + \ldots)\varphi\left(\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\beta^2} + \ldots\right) d\alpha\, d\beta \ldots,$$

qui se lie aux précédentes. Je renvoie pour le reste à mon Mémoire. De plus longs détails sur ce sujet sortiraient du cadre où l'on doit renfermer les *Comptes rendus*. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Mémoire sur le développement de la fonction perturbatrice; par* M. BOURGET. (Extrait par l'auteur.)

Commissaires, MM. Liouville, Binet, Delaunay.)

« Le développement de la fonction perturbatrice en série ordonnée suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons est, comme l'on sait, d'une grande importance pour le calcul des inégalités. On peut même dire qu'une Table parfaitement exacte des divers termes de cette série, jusqu'à un ordre assez élevé, ne serait pas moins utile aux astronomes qu'une Table de logarithmes.

» Mais l'application de la série de Taylor à ce problème présente des obstacles à peu près insurmontables quand on dépasse le quatrième ordre. Ainsi le travail de Burckhardt sur les termes du cinquième ordre (*Mémoires de l'Institut*, 1808) contient quelques erreurs relevées par M. Binet en 1812; ainsi celui de M. Airy pour la détermination des termes relatifs à la grande inégalité que Vénus introduit dans le moyen mouvement de la Terre, a été extrêmement laborieux, et les divergences entre ses résultats et ceux d'autres géomètres partis des mêmes données que lui font douter de son exactitude.

» M. Pontécoulant a publié dans sa *Théorie analytique du système du monde* un tableau des termes de la fonction perturbatrice, étendu jusqu'au

sixième ordre; mais, malgré tous les soins de l'auteur, ce travail ne peut être consulté qu'avec défiance, car mon ami M. Houel y a découvert un assez grand nombre de fautes, qu'il a signalées dans sa Thèse présentée à la Faculté de Paris en 1855.

» La source des difficultés du problème est facile à saisir. L'application de la série de Taylor ramène aux développements des puissances de x, y définies par les équations

$$r = a(1 + x),$$
$$v = l + y,$$

l désignant la longitude moyenne, et v la longitude vraie; et après la substitution de ces développements dans des formules compliquées, il reste à transformer en sommes des produits de lignes trigonométriques (*). Or toutes ces séries sont pénibles à former, la loi des coefficients est totalement cachée, les substitutions sont laborieuses, les fautes de calcul extrêmement probables et fort difficiles à découvrir.

» Trouver une méthode qui évite la formation des puissances de x, y; ramener à des opérations algébriques extrêmement simples, sinon rapides, la recherche des termes correspondants à un argument donné et à un ordre donné : tels sont les problèmes qui m'ont paru dignes d'attention, tant à cause de leur importance analytique que de leur utilité astronomique.

» J'en ai trouvé la solution en étudiant un travail peu connu de M. Cauchy. L'illustre géomètre a montré, dans les *Comptes rendus* de 1840, qu'on peut ramener rigoureusement à des intégrales simples les intégrales doubles qui se présentent dans la recherche d'un terme d'argument donné. Les unes qu'il désigne par A_j sont analogues aux $b_s^{(i)}$ de Laplace, les autres appelées $N_{t,k,l}$ sont données par l'équation

$$N_{t,k,l} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{tu\sqrt{-1}}\left(e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}\right)^k \left(e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}\right)^l du,$$

où t, k, l sont des nombres entiers et positifs, à l'exception du premier qui peut être négatif. On en trouve l'expression en termes finis sans difficulté.

» En examinant attentivement la méthode de M. Cauchy, on voit qu'elle est au fond un procédé de développement applicable à toutes les fonctions qui peuvent s'exprimer en séries de termes proportionnels aux sinus et co-

---

(*) *Voir* un Mémoire de M. Le Verrier dans la *Connaissance des Temps* pour 1844.

sinus des multiples d'un ou de plusieurs angles. Aussi, en modifiant un peu ses calculs, j'ai pu arriver à la forme que l'on donne habituellement à la série de la fonction perturbatrice, et qui se prête facilement aux dérivations dont on a besoin. Ainsi j'ai pu donner par l'emploi de cette méthode une solution nouvelle et élégante du problème de Képler (*).

» Dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, je m'occupe de la partie la plus importante de la fonction perturbatrice, c'est-à-dire de l'inverse $\frac{1}{\rho}$ de la distance mutuelle des deux planètes considérées, et je prépare tous les calculs nécessaires pour obtenir les termes généraux des divers ordres. On verra que les nouvelles transcendantes de M. Cauchy sont évitées et remplacées par les $b_s^{(i)}$ de Laplace; les nombres $N_{t,k,l}$ sont calculés pour la première fois et pour toutes les valeurs des indices dont on puisse avoir besoin; la disposition adoptée est d'ailleurs telle, que les erreurs sont à peu près impossibles. Après cela, toutes les difficultés du problème du développement de $\frac{1}{\rho}$ sont ramenées à la résolution d'un système d'égalités et d'inégalités du premier degré en nombres entiers. Les solutions sont fort nombreuses quand l'ordre des termes est élevé, mais toujours aussi faciles à trouver.

» Dans d'autres Mémoires, j'aurai l'honneur de soumettre à l'Académie l'application de ces formules générales à la formation du tableau des termes de $\frac{1}{\rho}$ jusqu'au septième ordre. »

GÉOMÉTRIE. — *Nouvelles remarques sur les surfaces à aire minima; par* M. **Ossian Bonnet**.

(Renvoi à l'examen de la Section de Géométrie.)

« Dans une Note publiée au *Compte rendu* du 14 mai 1855, j'ai résolu le problème suivant : *Trouver la surface à aire minima qui touche une surface donnée suivant une courbe donnée*, ou mieux *Trouver la surface à aire minima qui passe par une courbe donnée pour les différents points de laquelle on connaît la direction que doit avoir la normale à la surface.* Ma solution, basée sur la considération des lignes isothermes, était assez compliquée. Voici une solution beaucoup plus simple.

(*) *Compte rendu* du 1er mai 1854.

» La question se réduit à ceci : intégrer l'équation

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} = 0 \qquad (1)$$

de façon que, pour

$$y = \varphi(x),$$

on ait

$$\zeta = \varphi_1(x), \quad \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2 = \varphi_2(x), \qquad (2)$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions connues; par conséquent, de façon que

$$\frac{d\zeta}{dx} = \psi_1(x), \quad \frac{d\zeta}{dy} = \psi_2(x),$$

ψ_1 et ψ_2 étant deux autres fonctions connues, car ayant les équations (2), lorsque $y = \varphi(x)$, on a, pour la même hypothèse,

$$\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\zeta}{dy}\varphi'(x) = \varphi'_1(x), \quad \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2 = \varphi_2(x);$$

d'où

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{\varphi'_1 \mp \varphi'\sqrt{(1+\varphi'^2)\varphi_2 - \varphi'^2_1}}{1+\varphi'^2},$$

$$\frac{d\zeta}{dy} = \frac{\varphi'\varphi'_1 \pm \sqrt{(1+\varphi'^2)\varphi_2 - \varphi'^2_1}}{1+\varphi'^2}.$$

Or l'intégrale de l'équation (1) est

$$\zeta = f(x+iy) + f_1(x-iy);$$

si l'on fait

$$x + iy = u, \quad x - iy = v,$$

et que l'on substitue les variables u et v à x et y, il s'agira de déterminer les fonctions f et f_1, de façon que, pour

$$v = \Phi(u),$$

on ait

$$\frac{d\zeta}{du} = \Psi_1(u), \quad \frac{d\zeta}{dv} = \Psi_2(u),$$

Φ, Ψ_1, Ψ_2 étant trois nouvelles fonctions se déduisant simplement de φ, ψ_1, ψ_2. La question ainsi posée se résout immédiatement.

» On peut, au moyen de ce qui précède, trouver une surface à aire minima, d'après l'une des conditions suivantes :

» 1°. Connaissant une de ses lignes géodésiques;

» 2°. Connaissant une de ses lignes asymptotiques;

» 3°. Connaissant une de ses lignes de courbure.

» En effet, dans chacun de ces cas, on connaît les directions que doivent avoir les normales à la surface tout le long de la ligne donnée. Dans le premier cas, les normales à la surface sont les normales principales de la ligne donnée; dans le second cas, les normales à la surface sont les binormales de la ligne donnée; enfin, dans le troisième cas, les normales à la surface sont l'un des systèmes de normales à la ligne donnée qui forment une surface développable.

» Faisons quelques applications.

» Cherchons, en premier lieu, la surface à aire minima qui admet pour ligne asymptotique une hélice donnée. Supposons le cylindre sur lequel l'hélice est tracée parallèle aux ζ; représentons sa base par l'équation

$$\sigma = \varphi(x),$$

où σ désigne l'arc de la courbe compté à partir d'une origine fixe, et x l'angle que la tangente prolongée du côté des σ négatifs fait avec l'axe des ξ; enfin, appelons $\frac{\pi}{2} - \theta_0$ l'angle que les tangentes à l'hélice font avec l'axe des ζ; nous trouverons sans difficultés pour la surface cherchée

$$\zeta = \frac{1}{2i \sin iy_0} \{\varphi[x + i(y - y_0)] + \varphi[x - i(y - y_0)]\},$$

y_0 dépendant de θ_0 par la condition $\tang \frac{1}{2}\theta_0 = e^{y_0}$

» Cherchons, en second lieu, la surface à aire minima qui admet pour ligne de courbure une ligne plane donnée.

» Supposons la courbe donnée dans le plan des (ξ, η), et représentons-la par l'équation

$$\sigma = \varphi(x),$$

où σ désigne l'arc de la courbe compté à partir d'une origine fixe, et x l'angle que la normale à l'extrémité de σ fait avec l'axe des ξ, on aura, pour l'équation de la surface cherchée,

$$\zeta = \frac{1}{2 \cos iy_0} \{\varphi[x + i(y - y_0)] - \varphi[x - i(y - y_0)]\},$$

y_0 étant une constante arbitraire.

» On peut remarquer que les deux problèmes précédents fournissent une représentation géométrique de la partie réelle et de la partie imaginaire des valeurs que prend une fonction réelle connue pour les valeurs réelles de la variable, lorsqu'on suppose la variable imaginaire. »

GÉOLOGIE. — *De la formation et de la répartition des reliefs terrestres; par* M. F. DE FRANCQ. Second Mémoire. (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires précemment nommés : MM. Élie de Beaumont, Dufrénoy, de Senarmont.)

« J'ai mentionné, dans mon dernier Mémoire *sur la formation et la répartition des reliefs terrestres,* quelques-uns des caractères que les reliefs terrestres nous présentent sur les grands cercles. Ces caractères sont loin d'être les seuls que nous offrent les roses de grands cercles que j'ai cités.

» Ces roses, dont les grands cercles remontent tous successivement de 5 degrés en 5 degrés, de l'équateur jusqu'aux pôles, nous donnent, de zone en zone, les moyennes terrestres suivantes :

					moy. terr
Les 17 grands cercles qui remontent de l'équateur jusqu'au 10e degré de latitude.					84°,79
Les 24	»	»	du 15e au 25e	»	88°,42
Les 24	»	»	du 30e au 40e	»	91°,74
Les 24	»	»	du 45e au 55e	»	94°,06
Les 16	»	»	du 60e au 65e	»	97°,44
Les 16	»	»	du 70e au 75e	»	91°,73*xz*
Les 16	»	»	du 80e au 85e	»	79°,19*xz*
Les 4	»	»	au 90e	»	77°,19*xz*

» Ce résumé nous montre qu'il existe en moyenne, sur les grands cercles, un accroissement progressif de surfaces terrestres de l'équateur jusqu'au 65e degré de latitude. Cet accroissement s'arrête-t-il à ce degré de latitude, ou les grands cercles qui s'élèvent plus vers les pôles ne nous offrent-ils un décroissement de surfaces terrestres que parce que je n'ai pas pu faire mention des arcs terrestres polaires ? Cette question serait fort importante à résoudre, car elle se rattache : 1° à l'évaluation approximative des terres polaires ; 2° à l'influence que ces terres ont pu exercer sur la direction générale des plissements de l'écorce terrestre en donnant ou en ne donnant pas, en moyenne, aux grands cercles polaires un plus fort développement terrestre que celui que j'ai mentionné ci-dessus ; 3° cette question, enfin, se rattache encore à la cause elle-même qui a pu occasionner le développement

progressif de surfaces terrestres que j'ai constaté sur les grands cercles qui s'élèvent de l'équateur jusqu'au 65e degré de latitude. Les faibles sommes terrestres des grands cercles de la zone équatoriale, leurs nombreux arcs marins rectangulaires (qui nous dénotent, ainsi que je l'ai déjà démontré, des arcs d'exhaussement en voie de dépression), la direction plus ou moins du nord au sud que prennent si fréquemment, enfin, les alignements terrestres du globe, tout semble nous indiquer que la moyenne terrestre des grands cercles polaires est beaucoup plus élevée que celle que nous constatons sur leur parcours connu, et qu'il doit exister ainsi des surfaces terrestres polaires d'une assez grande étendue.

» Ce qui viendrait confirmer encore cette opinion, c'est que : 1° de l'équateur jusqu'au 65e de latitude, tous les grands cercles qui ont moins de 98 à 100 degrés d'arcs terrestres trouvent constamment leur somme complémentaire d'arcs d'exhaussement dans leurs arcs marins rectangulaires, tandis que ce fait n'a plus lieu, en général, à partir du 70e degré de latitude; 2° les alignements parallèles qui forment, jusqu'au 65e degré de latitude, un caractère si distinctif des grands cercles de plus de 102 degrés terrestres, existent souvent dans des proportions considérables sur des grands cercles polaires qui ont moins de 100 degrés terrestres sur leur parcours connu.

» Nous ne pouvons guère attribuer ces deux faits qu'à l'existence de terres polaires qui viennent donner aux grands cercles un chiffre terrestre plus élevé que celui que nous constatons sur leur parcours connu.

» Si nous admettions que les grands cercles polaires de moins de 99 ½ degrés terrestres qui n'atteignent pas ce chiffre normal par leurs arcs marins rectangulaires ont, en minimum, leur somme terrestre complémentaire dans les régions polaires, le minimum terrestre des grands cercles polaires serait en moyenne :

				moy. terr.
Sur les grands cercles qui s'élèvent jusqu'au 70e degré de latitude. . .				100°,19
»	»	au 75e	»	97°,44
»	»	au 80e	»	92°,12
»	»	au 85e	»	88°,65
»	»	au 90e	»	87°,81

» Mais cette évaluation serait évidemment trop faible, car elle n'attribue aucun parcours terrestre polaire, aux grands cercles, de plus de 99 ½ degrés terrestres.

» Que si l'on évaluait, au contraire, la valeur moyenne des arcs

terrestres polaires par voie de proportion, en déterminant la latitude moyenne à laquelle commencent les régions polaires inconnues et en attribuant aux grands cercles polaires qui les traversent une moyenne terrestre proportionnelle à celle qu'ils ont sur leur parcours connu, on obtiendrait les chiffres suivants en faisant commencer les arcs polaires inconnus au 75ᵉ degré de latitude nord et au 65ᵉ degré de latitude sud :

ANGLES des grands cercles à l'équateur.	ÉTENDUE DES ARCS POLAIRES INCONNUS.			ÉVALUATION PROPORTIONNELLE.				
	RÉGIONS arct. $= z$.	RÉGIONS antarct. $= x$.	TOTAL.	PARCOURS connus	ARCS terrestres.	PARCOURS inconnus.	ARCS terrestres polaires proportionnels.	SOMME terrestre proport. des grands cercles.
70° S	»	30°	30°	330°	93°,50	30°	8°,20	101°,73
75 S	»	40	40	320	89,94	40	11,24	101,18
80 S	22	45	67	293	81,72	67	18,68	100,40
85 S	28	48	76	284	76,53	76	20,48	97,01
90	30	50	80	280	77,19	80	22,05	99,24

	ROSES du méridien de Paris et du 180ᵉ de longitude. — Sommes terrestres.	ROSES du 45ᵉ E. de longitude et 135ᵉ O. de longitude. — Sommes terrestres.	ROSES du 90ᵉ de longitude et 90ᵉ O. de longitude. — Sommes terrestres.	ROSES du 135ᵉ E. de longitude et 45ᵉ O. de longitude. — Sommes terrestres.	ÉCARTS.
Amérique septentr., etc.	367° $\frac{3}{4}$	451°	541° $\frac{3}{4}$	413° $\frac{3}{4}$	174°
Amérique mérionale....	334 $\frac{3}{4}$	308 $\frac{1}{2}$	610 $\frac{1}{4}$	868	559 $\frac{1}{2}$
Afrique, etc.........	1251 $\frac{1}{2}$	1118 $\frac{1}{4}$	522	572 $\frac{1}{4}$	729 $\frac{1}{2}$
Europe, Asie, etc....	888 $\frac{3}{4}$	1091 $\frac{3}{4}$	1191 $\frac{3}{4}$	952 $\frac{3}{4}$	308
Malaisie, etc.........	78 $\frac{1}{2}$	58 $\frac{1}{4}$	147 $\frac{1}{2}$	234 $\frac{1}{4}$	176
Australie............	157 $\frac{1}{2}$	124 $\frac{1}{4}$	182 $\frac{1}{4}$	287 $\frac{3}{4}$	163 $\frac{1}{8}$
Grand Océan, etc.....	28	18 $\frac{1}{4}$	24 $\frac{1}{2}$	21 $\frac{3}{4}$	9 $\frac{3}{4}$

» Il semblerait donc que nous devons attribuer l'analogie des sommes

terrestres de mes roses de grands cercles à la similitude d'effets qu'a entraînée sur l'ensemble de chacune de ces roses la similitude de causes d'exhaussement qu'elles ont eue entre elles. L'une a porté sur l'Afrique ou l'Australie l'excédant terrestre que l'autre a porté sur l'Asie ou l'Amérique; mais elles sont toutes arrivées, en définitive, à des résultats presque semblables.

» Ce fait nous montre l'équilibre qui s'est maintenu sur le globe dans la répartition générale des reliefs terrestres, et par cela même aussi la valeur que nous devons attacher à l'étendue de ces reliefs sur les grands cercles.

» Cette dernière évaluation, qui me paraît être plus rationnelle que la première, ferait remonter l'accroissement moyen des reliefs terrestres sur les grands cercles jusqu'au 70e degré de latitude, et il y aurait ensuite des moyennes terrestres presque semblables, depuis le 75e degré de latitude jusqu'aux pôles.

» Les grands cercles des roses que j'ai formées sur l'équateur ne parcourant pas, au reste, le globe en nombre suffisant pour nous donner des moyennes terrestres fort exactes dans les régions polaires, j'ai pris de 10 en 10 degrés sur l'équateur des grands cercles qui remontent en faisceau, de 5 en 5 degrés, du 70e degré de latitude jusqu'aux pôles.

» Ces 162 grands cercles polaires nous donnent, en résumé, les chiffres suivants :

ANGLES des grands cercles avec l'équateur.	MINIMA TERRESTRES DES GRANDS CERCLES.		ÉVALUATION PROPORTIONNELLE.				
	Arcs terrestr. connus.	Minima terrestres des gr. cercles.	Parcours connus.	Arcs terrestres connus.	Parcours inconnus.	Arcs terrestres proportionnels.	Sommes terrestres proport. des gr. cercl.
70° S	105°,03 *x*	109°,13	330°	105°,03 *x*	30°	9°,54	114°,57
75 S	93,47 *xz*	100,11	320	93,47 *xz*	40	12,50	112,58
80 S	86,85 *xz*	98,72	293	86,85 *xz*	67	19,86	106,70
85 S	83,69 *xz*	97,18	284	83,69 *xz*	76	22,04	105,73
90	81,78 *xz*	93,39	280	81,78 *xz*	80	23,36	105,13

» Ces chiffres nous font voir, à leur tour, que l'accroissement progressif des arcs terrestres remonte, en moyenne, sur les grands cercles, non-seulement jusqu'au 70e degré de latitude, mais presque même jusqu'au 75e degré de lati-

tude, et qu'il existe au delà de ce dernier point une zone de grands cercles, dont les sommes terrestres moyennes, tout en s'abaissant un peu vers les pôles, restent presque stationnaires et conservent un chiffre assez élevé pour que nous devions admettre qu'il y a des surfaces terrestres considérables vers les pôles, et que l'ensemble des grands cercles polaires a exercé par son développement terrestre une action fortement dépressive sur les grands cercles des régions équatoriales et tempérées.

» Mes roses de grands cercles nous présentent un autre fait remarquable : leurs sommes terrestres sont presque toutes semblables entre elles,

	ROSES DU MÉRIDIEN DE PARIS ET DU 180e DE LONGIT.			ROSES DU 45e DE LONGIT. ET DU 135e O. DE LONGIT.			ROSES DU 90e E. DE LONGITUDE ET DU 90e O. DE LONGIT.			ROSES DU 135e E. DE LONGIT. ET DU 45e O. DE LONGIT.		
	Sommes terrestres.	Minim. terrestre polaire.	TOTAL.	Sommes terrestres.	Minim. terrestre polaire.	TOTAL.	Sommes terrestres.	Minimum terrestre polaire.	TOTAL.	Sommes terrestres.	Minim. terrestre polaire.	TOTAL
Total.	3109° ¼	185° ¾	3295°	3178° ½	89° ¼	3267° ¾	3220°	41°	3261°	3352°	26° ¼	3378° ¼
Moy..	86,37	5,16	91,35	88,29	2,48	90,77	89,40	1,44	90,50	93 x	0,73	93,84

et leurs étendues de parcours sur les mêmes continents présentent cependant des écarts considérables. »

M. A. **Breton** adresse une description d'une *pile, toujours humide, destinée aux usages médicaux,* sur laquelle il avait dans une précédente séance sollicité le jugement de l'Académie.

« Cette pile, dit M. Breton, est composée, pour l'un des pôles, d'un mélange de poudres de cuivre rouge, avec des poudres neutres de bois, destinées à diviser les parties métalliques ; ces poudres sont mélangées ensemble dans une dissolution saturée de chlorure de calcium qui en fait une mixture toujours humide, le chlorure de calcium ayant la propriété d'absorber toujours l'humidité de l'air. La préparation du deuxième mélange qui forme l'autre pôle de la pile, est identiquement la même, sauf que la poudre de cuivre est remplacée par une poudre de zinc. Ces deux préparations, mises dans un vase, et séparées entre elles par une cloison poreuse, établissent une pile à effet constant qui garde toujours la même intensité d'action, vu son état d'humidité constante et le nombre indéfini de ses éléments. »

(Renvoi à l'examen des Commissaires nommés pour la pile de Mlle Behrens : MM. Becquerel et Pouillet.)

M. Goubaux, professeur à l'École impériale vétérinaire d'Alfort, et M. Follin, professeur agrégé à l'École de Médecine de Paris, adressent pour le concours Montyon, prix de Médecine et Chirurgie, un travail qui leur est commun et qui a pour titre : « *De la Cryptorchidie chez l'homme et les principaux animaux domestiques.* »

(Réservé pour la future Commission des prix de Médecine et de Chirurgie.)

Deux autres Mémoires destinés au même concours sont adressés :

L'un par M. Rochat : « Essai sur la *médecine préventive* » ;

L'autre par M. Vanner. Ce dernier Mémoire est intitulé : « Du degré constant de la *chaleur animale* considérée dans l'homme comme loi de la santé ; des effets morbides produits par les variations de cette chaleur, et les applications à en déduire pour la thérapeutique ».

Un Mémoire destiné au concours pour le grand prix de Mathématiques (question concernant le théorème de Fermat) est parvenu depuis la dernière séance et a été inscrit sous le n° 6.

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre de l'Instruction publique autorise l'Académie à prendre sur les fonds restés disponibles les sommes demandées pour la gravure de planches destinées à accompagner un Mémoire de *M. Schimper* sur les Sphaignes, et pour la continuation d'un travail de *M. Sainte-Claire Deville* sur le bore, le silicium, etc.

M. le Ministre de la Marine met à la disposition de l'Académie une série de *spécimens du fond de la mer*, avec l'indication des parages, un tableau des coquilles microscopiques trouvées dans la mer, et une Notice explicative.

Cette série, que M. le Ministre a jugée de nature à intéresser l'Académie, fait partie d'une collection offerte au Gouvernement français par le Cabinet de Washington, et qui a été apportée par *M. Benham*, capitaine du génie dans l'armée fédérale des États-Unis.

Les spécimens sur lesquels M. le Ministre appelle l'attention de l'Académie seront soumis, ainsi que les documents qui les accompagnent, à l'examen d'une Commission composée de MM. Élie de Beaumont, Duperrey, de Quatrefages et Bravais.

M. Ellis, au nom de l'Administration du Muséum Britannique, remercie l'Académie des Sciences pour l'envoi d'une nouvelle série des *Comptes rendus*.

M. Jomard, en adressant un *Tableau des courbes représentant les phénomènes de l'atmosphère dans l'océan Atlantique*, dont l'auteur est M. le lieutenant Maury, directeur de l'Observatoire de Washington, l'accompagne de la Lettre suivante :

« Je suis chargé par M. Maury, directeur de l'Observatoire de Washington, de faire hommage à l'Académie d'un Tableau montrant la proportion des pluies, calmes, brouillards et tempêtes, dans les hémisphères nord et sud, sous les parallèles correspondants de l'océan Atlantique. Les divers résultats que présente ce tableau figuré sont fournis par 107 277 observations faites dans la partie nord de l'Atlantique et par 158 025 observations faites dans la partie sud. Il résulte de ce tableau que les calmes sont moins fréquents dans l'hémisphère sud que dans l'autre. Il en est de même des autres phénomènes atmosphériques; l'atmosphère est plus variable, et sujette à plus de pluies, plus de brouillards, plus de vents, plus de tonnerre dans l'hémisphère nord que dans l'hémisphère sud, particulièrement entre l'équateur et le cinquante-cinquième parallèle. »

M. le Secrétaire perpétuel communique la Lettre suivante qui lui a été adressée par *M. Terquem* à l'occasion du Rapport fait dans la séance du 10 mars, sur une méthode proposée pour le calcul des distances lunaires observées en mer.

« Dans les *Comptes rendus* (n° 10, p. 475), on exprime le désir d'avoir une Table donnant les *sinus naturels* de 0 à 90 degrés, de 10 secondes en 10 secondes, et on propose de la faire calculer.

» Cette Table existe. C'est le *Thesaurus mathematicus*, *etc.*, *sive Canon sinuum ad radium* 10^{15} *et ad dena quæque scrupula* secunda *quadrantis una cum sinibus primi et postremi gradus*..., Table calculée par Pitiscus. On en lit une description dans le *Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques*, t. I, p. 10 et 11; 1855. On croit aussi utile de rappeler que, parmi les grandes Tables déposées à l'Observatoire impérial, on trouve une Table de sinus naturels pour chaque *seconde décimale* avec 25 décimales, et à 7 ou 8 colonnes de différences.

» Il est bien à regretter que nos astronomes aient quitté la division décimale du cercle et du jour; si l'on avait persisté, cette division aurait fini,

tout comme notre système métrique, par être généralement adoptée. On peut y revenir. Dans la grande carte de France, cette division est employée; excellent exemple à suivre. »

OPTIQUE. — *Théorie mathématique des effets de la lentille simple employée comme objectif de chambre obscure et comme besicle; par* **M. Breton** (de Champ.)

§ Ier. — *Exposé de la question.*

« On sait par expérience que l'effet obtenu d'une lentille simple, de longueur focale donnée, dépend des courbures des deux surfaces réfringentes, de l'ordre dans lequel ces deux surfaces agissent sur les rayons de lumière, et aussi de la position et de l'ouverture du diaphragme qui limite l'amplitude des pinceaux incidents. Le docteur Wollaston a, le premier, essayé de déterminer les dispositions les plus convenables pour le cas où la lentille doit être employée comme objectif de *chambre obscure*. Il a trouvé que l'on obtient de tres-beaux effets en faisant la lentille concave du côté des objets et convexe vers l'image, et le rayon de courbure de la surface antérieure égal à deux fois celui de la surface postérieure. Quant au diaphragme, Wollaston le place au devant de la lentille, c'est-à-dire du côté concave, à une distance égale à $\frac{1}{8}$ de la longueur focale. Enfin le diamètre d'ouverture de ce diaphragme est fixé à $\frac{1}{11}$ de la même longueur. Toutefois cette dernière proportion ne résulte pas aussi explicitement que les précédentes de la description donnée par ce célèbre physicien (*), auquel on doit aussi l'indication de la disposition *périscopique* préférée aujourd'hui par un assez grand nombre de personnes pour les verres de besicles.

» Les recherches de Wollaston ont été reprises par notre excellent opticien M. Cauchoix. Il a obtenu des résultats analogues; seulement le rapport des rayons de courbure des surfaces antérieure et postérieure de la lentille lui a paru devoir être de 8 à 5 plutôt que de 2 à 1 (**). Il est incontestable que quand l'appareil est ainsi construit, l'image est incomparablement plus belle et plus étendue qu'on ne l'obtiendrait avec la lentille biconvexe plus communément employée. Mais personne encore, que je sache, n'a donné la théorie mathématique de ces effets remarquables, lesquels sont évidemment une conséquence des relations spéciales qu'il faut établir entre les éléments

(*) *Transactions philosophiques de la Société Royale de Londres*, pour l'année 1812, pages 370 et suivantes.

(**) *Précis de physique expérimentale*, par M. Biot, 3e édition, tome II, page 356.

de l'appareil pour que les images produites soient à la fois étendues, nettes et fidèles. La solution de ce problème est implicitement renfermée dans mes précédentes communications relatives à l'optique instrumentale (*) : c'est elle que je me propose de développer ici, comme premier exemple de l'application des principes nouveaux que j'ai formulés jusqu'à présent d'une manière trop abstraite pour que l'on en vît l'utilité. J'appliquerai ensuite les mêmes principes à la lentille simple employée comme besicle.

§ II. — *Relation de laquelle depend l'étendue de l'image.*

» La condition à laquelle nous devons avant tout satisfaire, est d'obtenir un champ étendu. Cela exige que les pinceaux obliques soient transformés par la lentille en pinceaux *coniques*, de même que les pinceaux émanés de points situés sur l'axe de l'objectif. Les relations à établir entre les éléments de l'appareil pour cet objet sont celles que j'ai données le 22 janvier 1855. Je les reproduis ici en les restreignant au cas de deux surfaces :

$$u\left[\left(\frac{2}{\Delta_1}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{r_1}\right)^2+\frac{1}{\Delta_1\Delta^2_{c,1}}-\frac{1}{r_1\Delta_1^2}+\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{\Delta_1}\right)^2\right]$$

$$=u_1\left[\left(\frac{2}{\Delta'_1}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{\Delta'_{c,1}}-\frac{1}{r_2}\right)^2+\frac{1}{\Delta'_1\Delta'^2_{c,1}}-\frac{1}{r_1\Delta'^2_1}+\frac{1}{\rho'_1}\left(\frac{1}{\Delta'_{c,1}}-\frac{1}{\Delta'_1}\right)^2\right]$$

$$u_1\left[\left(\frac{2}{\Delta_2}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{\Delta_{c,2}}-\frac{1}{r_2}\right)^2+\frac{1}{\Delta_2\Delta^2_{c,2}}-\frac{1}{r^2\Delta_2^2}+\frac{1}{\rho'_1}\left(\frac{1}{\Delta_{c,2}}-\frac{1}{\Delta_2}\right)^2\right]$$

$$=u\left[\left(\frac{2}{\Delta'_2}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{\Delta'_{c,2}}-\frac{1}{r_2}\right)^2+\frac{1}{\Delta'_2\Delta'^2_{c,2}}-\frac{1}{r_2\Delta'^2_2}+\frac{1}{\rho'_2}\left(\frac{1}{\Delta'_{c,2}}-\frac{1}{\Delta'_2}\right)^2\right]$$

$$u\left[-\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{r_1}\right)^2+\frac{1}{\Delta_1\Delta^2_{c,1}}-\frac{1}{r_1\Delta_1^2}+\frac{1}{\rho''_0}\left(\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{\Delta_1}\right)^2\right]$$

$$=u_1\left[-\frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{\Delta'_{c,1}}-\frac{1}{r_1}\right)^2+\frac{1}{\Delta'_1\Delta'^2_{c,1}}-\frac{1}{r_1\Delta'^2_1}+\frac{1}{\rho''_1}\left(\frac{1}{\Delta'_{c,1}}-\frac{1}{\Delta'_1}\right)^2\right]$$

$$u_1\left[-\frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{\Delta_{c,2}}-\frac{1}{r_2}\right)^2+\frac{1}{\Delta_2\Delta^2_{c,2}}-\frac{1}{r_2\Delta_2^2}+\frac{1}{\rho''_1}\left(\frac{1}{\Delta_{c,2}}-\frac{1}{\Delta_2}\right)^2\right]$$

$$=u\left[-\frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{\Delta'_{c,2}}-\frac{1}{r_2}\right)^2+\frac{1}{\Delta'_2\Delta'^2_{c,2}}-\frac{1}{r_2\Delta'^2_2}+\frac{1}{\rho''_2}\left(\frac{1}{\Delta'_{c,2}}-\frac{1}{\Delta'_2}\right)^2\right]$$

$$u\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{\Delta_1}\right)=u_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{\Delta'_1}\right),\qquad u\left(\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{r_1}\right)=u_1\left(\frac{1}{\Delta'_{c,1}}-\frac{1}{r_1}\right),$$

$$u_1\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{\Delta_2}\right)=u\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{\Delta'_2}\right),\qquad u_1\left(\frac{1}{\Delta_{c,2}}-\frac{1}{r_1}\right)=u\left(\frac{1}{\Delta'_{c,2}}-\frac{1}{r_2}\right),$$

$$\Delta_2=\Delta'_1+h_1\qquad\qquad \Delta_{c,2}=\Delta'_{c,1}+h_1.$$

(*) Voyez les *Comptes rendus* des séances des 18 septembre 1854, 22 janvier 1855 et 10 mars 1856.

» Afin de simplifier la question, je supposerai la lentille assez mince pour que l'on puisse considérer sans erreur sensible son épaisseur h_1 comme nulle. J'admettrai aussi que $\frac{1}{\rho'_0}$ et $\frac{1}{\rho''_0}$ sont nuls, ce qui revient à supposer que les points rayonnants sont situés sur un plan perpendiculaire à l'axe de la lentille. Retranchant alors la troisième équation de la première et la quatrième de la seconde, il vient

$$\frac{2u}{\Delta}\left(\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{\rho_1}\right)^2=\frac{2u_1}{\Delta'_1}\left(\frac{1}{\Delta'_{c,1}}-\frac{1}{r_1}\right)^2+u_1\left(\frac{1}{\rho'_1}-\frac{1}{\rho''_1}\right)\left(\frac{1}{\Delta'_{c,1}}-\frac{1}{\Delta'_1}\right)^2,$$

$$\frac{2u_1}{\Delta'_1}\left(\frac{1}{\Delta'_{c,1}}-\frac{1}{r_2}\right)^2+u_1\left(\frac{1}{\rho'_1}-\frac{1}{\rho''_1}\right)\left(\frac{1}{\Delta'_{c,1}}-\frac{1}{\Delta'_1}\right)^2=\frac{2u}{\Delta'_2}\left(\frac{1}{\Delta'_{c,2}}-\frac{1}{r_2}\right)^2+u\left(\frac{1}{\rho'_2}-\frac{1}{\rho''_2}\right)\left(\frac{1}{\Delta'_{c,2}}-\frac{1}{\Delta'_2}\right)^2.$$

La condition de *conicité* des pinceaux émergents est $\rho''_2=\rho'_2$. Supposons-la remplie, et ajoutons ces deux équations membre à membre, on trouve

$$\frac{u}{\Delta_1}\left(\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{r_1}\right)^2+\frac{u_1}{\Delta'_1}\left(\frac{1}{\Delta'_{c,1}}-\frac{1}{r_2}\right)^2=\frac{u_1}{\Delta'_1}\left(\frac{1}{\Delta'_{c,1}}-\frac{1}{r_1}\right)^2+\frac{u}{\Delta'_2}\left(\frac{1}{\Delta'_{c,2}}-\frac{1}{r_2}\right)^2:$$

f étant la longueur focale de la lentille, on a

$$\frac{1}{f}=\frac{u_1-u}{u}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right),\quad \frac{1}{\Delta'_2}=\frac{1}{f}+\frac{1}{\Delta_1},\quad \frac{1}{\Delta'_{c,2}}=\frac{1}{f}+\frac{1}{\Delta_{c,1}}.$$

$$\frac{u_1}{\Delta'_1}=\frac{u_1-u}{r_1}+\frac{u}{\Delta_1},\quad \frac{1}{\Delta'_{c,1}}=\frac{u_1-1}{u_1}\frac{1}{r_1}+\frac{u}{u_1}\frac{1}{\Delta_{c,1}},$$

d'après cela notre équation devient

$$\left(\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{r_1}\right)^2-\frac{2u}{u_1-u}\left[\frac{1}{u_1}\left(\frac{u_1-u}{r_1}+\frac{u}{\Delta_1}\right)-\frac{u_1}{u}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{\Delta_1}\right)\right]\left(\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{r_1}\right)$$
$$-\frac{uu_1}{(u_1-u)^2}\frac{1}{f}\left[\frac{1}{u_1}\left(\frac{u_1-u}{r_1}+\frac{u}{\Delta_1}\right)-\frac{u_1}{u}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{\Delta_1}\right)\right]=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left(\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{r_1}\right)^2-\frac{2u}{u_1-u}\left[\frac{1}{\Delta'_1}-\frac{u_1}{u}\frac{1}{\Delta'_2}\right]\left(\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{r_1}\right)-\frac{uu_1}{(u_1-u)^2}\frac{1}{f}\left[\frac{1}{\Delta'_1}-\frac{u_1}{u}\frac{1}{\Delta'_2}\right]=0;$$

d'où l'on tire, en laissant les coefficients de l'inconnue $\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{r_1}$ sous leur forme explicite,

$$\frac{1}{\Delta_{c,1}}-\frac{1}{r_1}=\frac{u}{u_1-u}\left\{\left[\frac{1}{u_1}\left(\frac{u_1-u}{r_1}+\frac{u}{\Delta_1}\right)-\frac{u_1}{u}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{\Delta_1}\right)\right]\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{\left[\frac{1}{u_1}\left(\frac{u_1-u}{r_1}+\frac{u}{\Delta_1}\right)-\frac{u_1}{u}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{\Delta_1}\right)\right]\left[\frac{1}{u_1}\left(\frac{u_1-u}{r_1}+\frac{u}{\Delta_1}\right)-\frac{u_1}{u}\frac{1}{\Delta_1}\right]}\right\}.$$

On voit par là que la valeur de $\Delta_{c,1}$ ne sera réelle qu'autant que les deux facteurs sous le radical seront de même signe. Si nous considérons en particulier le cas le plus ordinaire, où les objets sont assez éloignés pour que l'on puisse faire sans erreur appréciable $\frac{1}{\Delta_1} = 0$, on a

$$\frac{1}{\Delta_{c,1}} = \frac{u_1 + u}{u_1} \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{u_1}{u_1 - u} \cdot \frac{1}{f} \pm \frac{u}{u_1 - u} \sqrt{\frac{u_1 - u_1}{u_1} \cdot \frac{1}{r_1} \left(\frac{u_1 - u}{u_1} \frac{1}{r_1} - \frac{u_1}{u} \frac{1}{f} \right)}.$$

» La valeur de f étant négative pour une lentille convergente, si l'on suppose que r_1 est positif, ou que la surface antérieure de la lentille est concave vers les objets, la valeur du facteur $\frac{u_1 - u}{u_1} \frac{1}{r_1} - \frac{u_1}{u} \frac{1}{f}$ sera positive, et par suite on aura pour $\Delta_{c,1}$ deux valeurs réelles. Quand la valeur de $\frac{1}{r_1}$ est négative et presque nulle, le facteur $\frac{u_1 - u}{u_1} \frac{1}{r_1} - \frac{u_1}{u} \frac{1}{f}$ a le signe de $-\frac{u_1}{u} \frac{1}{f}$, et conséquemment est positif. Donc $\Delta_{c,1}$ est alors imaginaire. Cette imaginarité persiste lorsqu'on donne à $\frac{1}{r_1}$ des valeurs absolues de plus en plus grandes, jusqu'à ce que l'on ait

$$\frac{u_1 - u}{u_1} \frac{1}{r_1} - \frac{u_1}{u} \frac{1}{f} = 0, \quad \text{ou} \quad r_1 = \frac{u(u_1 - u)}{u_1^2} f,$$

ce qui nous apprend que, dans ce cas, la lentille tourne sa convexité vers les objets.

» De la relation $\frac{1}{f} = \frac{u_1 - u}{u} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$, on tire, après y avoir substitué cette valeur de r_1, $r_2 = \frac{u}{u_1 + u} f$. La surface postérieure tourne donc sa concavité vers l'image, de sorte que la lentille est encore un ménisque. Et il est évident que cette forme restera toujours telle pour des valeurs absolues de $\frac{1}{r_1}$ plus grandes que celles que nous venons de considérer.

» Ainsi donc, *aucune lentille biconvexe, employée comme objectif de chambre obscure pour former l'image d'objets éloignés, ne satisfait à la condition mathématique de laquelle dépend l'étendue des images.*

» Et *si l'on emploie une lentille plan-convexe, la face plane doit être tournée vers les objets.*

» Il est facile de reconnaître ce qui arriverait si $\frac{1}{\Delta_1}$ n'était pas nul; je laisse le lecteur faire lui-même cette discussion. »

ASTRONOMIE. — *Sur deux étoiles variables; par* M. Ernest Liouville.

« 1. On sait qu'il existe des étoiles dont l'éclat change périodiquement. La premiere de ces étoiles variables dont on ait déterminé la période est o de la Baleine. Plus tard, la durée de la période a été trouvée pour quelques autres, par exemple pour Algol, η de l'Aigle, α d'Hercule, α d'Orion, etc. Mais quoique le nombre des étoiles reconnues variables soit assez grand, on n'a de données a peu près certaines que pour un petit nombre d'entre elles.

» Voici une nouvelle étoile qu'il sera aisé, je crois, d'ajouter à ces dernieres. Elle porte le numéro 4040 dans le catalogue de Groombridge, qui a le premier déterminé sa position; ses coordonnées au 1er janvier 1856 sont :

$$Æ = 23^h\ 12^m\ 41^s,$$
$$\Delta.P.N = 17^\circ\ 5'\ 40''.$$

» Elle varie de la 6e grandeur à la 10e : on peut conjecturer une période d'environ 115 jours; mais je ne présente ce nombre qu'avec la plus grande réserve, car mes observations (faites au méridien seulement et pour un autre objet) sont malheureusement peu nombreuses. Dans l'espoir de déterminer exactement la durée de la période par des recherches nouvelles, j'avais différé jusqu'à ce jour de publier mes résultats. Mais les moyens de travail me manquent. Je me décide donc à donner ici mes observations qui, dans l'état même où les circonstances m'ont forcé de les laisser, ne paraîtront pas, je le crois, tout à fait dépourvues d'intérêt.

1853.	24 janvier.	L'étoile est de	7e grandeur.
	25 février.	—	6^e
	12 mars.	—	7^e
	6 avril.	—	9e à 10^e
	17 avril.	—	7e à 8^e
	27 avril.	—	7^e
	23 juillet.	—	8^e
	12 septembre.	—	7^e
	17 septembre.	—	6e à 7^e
	20 septembre.	—	6e à 7^e
	12 octobre.	—	6^e

» 2. Il est encore une autre étoile variable sur laquelle j'appellerai l'attention des astronomes. C'est l'étoile 1706 du catalogue de l'Association

Britannique dont les coordonnées au 1er janvier 1856 sont :

$$\text{Æ} = 5^h\,20^m\,36^s,$$
$$\Delta.\text{P.N} = 15^\circ\ 3'\ 41''.$$

» Dans ce catalogue elle est marquée comme appartenant à la 5e grandeur. Voici quelle grandeur je lui attribuais successivement en 1853 :

18 janvier.......	6e à 7^e^	23 avril..........	6^e^
19 janvier......	6e à 7^e^	30 avril..........	6^e^
28 janvier......	6e à 7^e^	7 juin...........	6^e^
12 février.......	7^e^	21 juin...........	6^e^
21 février.......	6e à 7^e^	27 juin..........	6^e^

» On ne peut déduire aucune période de ces observations ; je les mentionne cependant, parce qu'elles pourront servir de termes de comparaison et se combiner utilement avec des observations postérieures. »

ZOOLOGIE. — *Document pour servir à la monographie des Chéiroptères sud-américains; par* M. PAUL GERVAIS.

« Le Mémoire dont j'ai l'honneur d'adresser le résumé à l'Académie a pour objet principal la description des nombreuses espèces de chauves-souris que M. Francis de Castelnau et son compagnon, feu M. Emile Deville, ont recueillies pendant leur longue expédition dans l'Amérique du Sud. Mon but, en le rédigeant, n'a pas été de faire une monographie définitive des Chéiroptères qui vivent dans l'Amérique méridionale, mais de préparer des documents pour cette monographie, en réunissant les nombreuses observations scientifiques auxquelles pouvait donner lieu l'étude des matériaux mis à ma disposition. Outre les chauves-souris rapportées par MM. de Castelnau et Deville, j'en ai décrit quelques autres que M. de Castelnau lui-même a plus récemment trouvées aux environs de Bahia, ou que M. Westphal a reçues du même lieu.

» Pallas, Et. Geoffroy-Saint-Hilaire, Frédéric Cuvier et de Blainville avaient déjà tiré un excellent parti des caractères que fournit le système dentaire pour la détermination spécifique et la classification des Chéiroptères. En poussant plus loin cette analyse, commencée par Daubenton (1), j'ai pu obtenir plusieurs résultats nouveaux qui seront à la fois utiles pour

---

(1) *Histoire de l'Académie des Sciences* pour 1759.

l'ostéologie et pour la zoologie des Chéiroptères. Ces résultats permettront aussi d'arriver à une notion des chauves-souris fossiles en Amérique plus parfaite que celle que nous possédons encore.

» J'énumère dans mon Mémoire une soixantaine d'espèces vivantes qui appartiennent toutes à la faune de l'Amérique méridionale, et je donne, pour la plupart d'entre elles, des descriptions détaillées ainsi que des figures odontographiques. Grâce à l'obligeance de M. Isidore Geoffroy-Saint-Hilaire, j'ai pu comparer ces espèces, et plus particulièrement celles que que je crois nouvelles, aux types en partie décrits par son père ou par lui, que possède le collection du Muséum de Paris.

» Tous les Chéiroptères américains appartiennent aux deux familles des Phyllostomidés et des Vespertilionidés. On n'a encore rapporté de ce continent aucune espèce de la famille des Ptéropodidés ou Roussettes, ni de celle des Rhinolophidés, et il ne paraît pas qu'il y en existe. Les Phyllostomidés ou les chauves-souris de la famille des Sténodermes, des Phyllostomes et des Vampyres, sont exclusivement propres à l'Amérique, et nulle part ailleurs on n'en trouve des espèces. Au contraire, les Vespertilionidés sont des animaux cosmopolites; toutefois leurs espèces américaines et, dans certains cas, les genres formés par ces espèces, sont différents de ceux qui vivent sur les autres continents. Il en est cependant qui rentrent dans des genres européens.

» Je ne parlerai dans cette première Note que des Phyllostomidés.

» Ces chauves-souris, qu'on a aussi nommées Vampyridés, peuvent être partagées en quatre tribus : les *Desmodins*, les *Sténodermins*, les *Glossophagins* et les *Vampyrins*.

» 1. On ne connaît encore parmi les DESMODINS que le seul genre *Desmodus*, qui est si remarquable par son système dentaire. Je montre que dans le premier âge il a deux paires d'incisives supérieures, comme la plupart des autres Phyllostomidés, et que ces dents sont alors fort différentes, quant à la forme, de la paire unique qui les remplacera.

» 2. Les STÉNODERMINS sont plus nombreux, et l'on en reconnaît aisément plusieurs genres. Ils rappellent plus ou moins, par la forme de leurs dents et par la brièveté de leur membrane interfémorale, le *Sténoderme* d'Et. Geoffroy-Saint-Hilaire. C'est à cette tribu qu'appartiennent les Phyllostomidés frugivores. Les molaires de quelques-uns d'entre eux ressemblent, par les tubercules émoussés de leur couronne, à celles de certains singes ou même des kinkajous, qui ont un régime analogue. Chez d'autres, elles ont leur bord externe tres-relevé, principalement les antérieures. Leur

nombre varie suivant les formules $\frac{4}{4}$, $\frac{4}{5}$ et $\frac{5}{5}$, caractères qui, joints à ceux de la queue courte ou nulle et de la membrane interfémorale, rendent facile la distinction des genres de Sténodermins.

» J'ai étudié en nature six de ces genres : les *Brachyphylla*, J.-E. Gray; les *Pteroderma*, P. Gerv. (établis pour le *Phyllostoma perspicillatum*); les *Artibæus*, Leach; les *Dermanura*, P. Gerv. (pour le *Stenoderma undatum*, Blainv.); les *Stenoderma*, E. Geoffr., et les *Sturnira*, Gray. Ces derniers comprennent les espèces qui ont les dents les plus émoussées (*Phyllostoma lilium*, E. Geoff., etc.).

» 3. Les GLOSSOPHAGINS, qui répondent au genre *Glossophaga* d'E. Geoffroy, ne m'ont fourni qu'un petit nombre de remarques nouvelles. C'est après avoir exposé leur classification actuelle que j'ai parlé du *Phyllostoma brevicaudum*, espèce dénommée par le prince de Neuwied. Cette espèce, dont la synonymie maintenant est fort embrouillée, a été quelquefois confondue avec les Glossophages, dont elle se distingue cependant par certains caractères tirés de la forme du crâne, de la dentition, etc., caractères qui la rattachent simultanément aux Sténodermins et aux Vampyrins. Je la regarde comme devant servir de type à un genre distinct qui pourra prendre le nom d'*Hemiderma*.

» 4. La quatrième tribu des Phyllostomidés est celle des VAMPYRINS, qui réunit aussi plusieurs genres et particulièrement ceux des *Vampyrus*, Leach, et des *Phyllostoma*, tels qu'ils ont dû être modifiés par suite des derniers progrès de la science. Plusieurs autres divisions, de valeur également générique, peuvent y être pareillement rapportées : tels sont les *Lophostoma*, que M. d'Orbigny et moi avons fait connaître; les *Macrophyllus*, genre établi par M. Gray pour le *Phyllostoma macrophyllum* du prince de Neuwied; et deux autres genres encore, les *Tylostoma* et les *Schizostoma*, caractérisés ici pour la première fois.

» Les *Tylostoma* comprendront les *Phyllostoma bidens*, Spix, et *Phyllostoma crenulatum*, E. Geoffr., qui ont $\frac{5}{5}$ molaires et seulement $\frac{2}{1}$ incisives.

» Les *Schizostoma* ont $\frac{5}{6}$ molaires et $\frac{2}{2}$ incisives. L'espèce sur laquelle j'établis ce genre m'a paru nouvelle; je lui donne le nom de *Schizostoma minutum*.

» 5. J'ai rapproché des Vampyrins, mais sans le ranger définitivement

dans la même tribu, un autre genre nouveau que j'appelle *Spectrellum*. Je l'établis sur une chauve-souris de Bahia qui m'a été remise par M. Westphal. Sa formule dentaire est la suivante : $\frac{2}{2}$ incisives, $\frac{1}{1}$ canines, $\frac{6}{6}$ molaires; sa queue est longue et complète, comme celle des Macrophylles ; mais ses trois vertèbres intermédiaires sont beaucoup plus longues et beaucoup plus grêles que les autres ; ses proportions générales rappellent celles des Vampyrins. Toutefois cette chauve-souris, qui paraît devoir occuper le dernier rang parmi les Phyllostomidés, manque de la feuille nasale qui caractérise les autres animaux de cette famille ; je l'ai décrite sous le nom de *Spectrellum macrurum*. »

GÉOLOGIE. — *Sur un gisement de pouzzolane, récemment découvert dans la Haute-Loire*. (Extrait d'une Lettre de M. **Bertrand**, de Lom.)

« Les pouzzolanes communes, déjections volcaniques incohérentes, employées à la préparation des mortiers pour les besoins de la maçonnerie ordinaire, se trouvent fort répandues, comme tout le monde sait, dans plusieurs de nos départements. Mais il restait à découvrir, en France, la pouzzolane vraie, la pouzzolane de la géologie, possédant toutes ses affinités chimiques, qui la font rechercher pour les constructions des grands travaux. Cette découverte est aujourd'hui un fait accompli ; j'ai constaté, en effet, l'existence de cette pouzzolane dans un point du département de la Haute-Loire.

» Les échantillons que j'adresse à l'Académie la mettront à même de reconnaître l'origine géologique, la nature et les qualités chimiques de cette matière ; ces échantillons, à l'état argiloïde, happant fortement à la langue, renferment encore une notable quantité de grains ou fragments non décomposés des matières de projections qui sont le cachet de leur origine.

» Ce gisement est situé dans les communes de Mazairat et de Saint-Eble, près Langeac (Haute-Loire), dans la région dite *Coupet*, si riche en ossements et en corindons, et dont j'ai déjà entretenu l'Académie, en avril 1855. Qu'il me soit permis de lui rappeler la demande que je lui adressai à cette époque, tendant à obtenir des ressources pécuniaires, pour continuer l'exploration de ce gîte précieux ; mon intention étant de livrer à l'École impériale des Mines ou au Muséum d'Histoire naturelle tous les fossiles provenant des fouilles qui seraient poursuivies sous les auspices de l'Académie. »

Conformément à une décision déjà ancienne de l'Académie, toute de-

mande de fonds ne peut être renvoyée à la Commission administrative qu'après avoir été appuyée par la Section compétente; en conséquence, la Lettre de M. Bertrand, de Lom, sera soumise à l'examen de la Section de Minéralogie et de Géologie.

M. **Schroeder** adresse, en date des 12 et 16 mars, deux Notes sur les soulèvements absolus de la surface du globe.

M. Liouville est invité à prendre connaissance de cette communication et à faire savoir à l'Académie si elle est de nature à devenir l'objet d'un Rapport.

M. **Duriau**, à l'occasion d'une Note sur l'absorption cutanée présentée par M. *Poulet* dans la séance du 3 mars dernier et insérée par extrait dans le *Compte rendu* de cette séance, prie l'Académie de vouloir bien lui accorder prochainement la parole pour lui soumettre les résultats des expériences qu'il a faites sur la même question, résultats dont quelques-uns ont été déjà l'objet d'une publication qui paraît n'avoir pas été connue de M. Poulet.

M. **Taupenot** demande également un tour prochain de lecture pour la description de l'*anémomètre enregistreur* mentionné dans sa Lettre du 10 mars.

Cet appareil, déjà installé dans la pièce qui précède la salle des séances, y restera jusqu'au lundi suivant, jour auquel M. Taupenot espère que l'Académie voudra bien lui accorder la parole, ses fonctions de professeur ne lui permettant pas un long séjour à Paris.

M. **Millot**, auteur d'un Mémoire sur une méthode d'arboriculture ayant pour objet de faire développer un *bourgeon* sur un point déterminé d'un rameau, annonce qu'il vient d'adresser à la Commission chargée de l'examen de son Mémoire une série de pièces à l'appui de sa méthode, sur laquelle il espère obtenir prochainement un Rapport.

M. **Cancalon** prie l'Académie de vouloir bien hâter le travail de la Commission qui a été chargée de l'examen de son Mémoire sur les modifications éprouvées par le *climat* de l'Italie, de la France et de l'Amérique.

(Renvoi à la Commission nommée, qui se compose de MM. Babinet, Duperrey et Bravais.)

Mlle **Behrens** adresse une nouvelle Lettre relative à sa pile magnétique portative destinée aux usages médicaux.

(Renvoi à l'examen des Commissaires précédemment nommés : MM. Becquerel et Pouillet.)

M. **Elvart** transmet de nouveaux documents imprimés relatifs aux effets obtenus, dans le traitement du choléra-morbus, de la méthode de *M. Tironi.*

(Renvoi à la Section de Médecine constituée en Commission spéciale du legs Bréant.)

A 4 heures et demie, l'Académie se forme en comité secret.

COMITÉ SECRET.

La Section de Médecine et de Chirurgie déclare, par l'organe de son doyen **M. Serres**, qu'elle maintient la liste qu'elle a présentée dans la séance précédente, ainsi que les *ex æquo* qui s'y trouvaient.

Voici cette liste :

MÉDECINE.			CHIRURGIE.		
Au 1er *rang*...	**M. Cruveilhier**, **M. Longet**,	*ex æquo.*	*Au* 1er *rang.*	**M. Jobert**, de Lamballe, **M. Jules Guérin**,	*ex æquo.*
Au 2e *rang*...	**M. Poiseuille**, **M. Piorry**,	*ex æquo.*	*Au* 2e *rang.*	**M. Baudens**, **M. Laugier**, **M. Malgaigne**,	*ex æquo.*

La majorité de la Section recommande à l'Académie la liste de Médecine.

Les titres de ces candidats sont discutés. L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

La séance est levée à 7 heures. E. D. B.